Voyage au pays des graphes

Aline Parreau

Université de Liège

Mathematatik Park – 10 mai 2014

Un problème d'emploi du temps

Combien de salles pour les cours suviants ?

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

Un problème d'emploi du temps

Combien de salles pour les cours suviants ?

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

$\rightarrow$ Possible avec 3 salles :

- Salle 1 : Anglais, Droit, Français
- Salle 2 : Biologie, Espagnol
- Salle 3 : Chimie

Deux salles ?

Un problème d'emploi du temps

Combien de salles pour les cours suviants ?

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

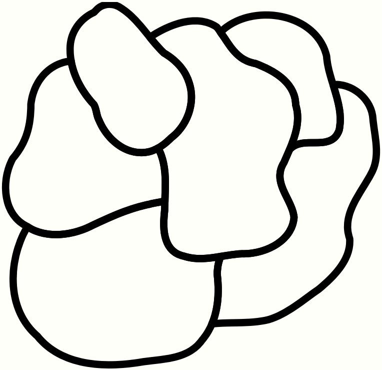
$\rightarrow$ Possible avec 3 salles :

- Salle 1 : Anglais, Droit, Français
- Salle 2 : Biologie, Espagnol
- Salle 3 : Chimie

Deux salles ? $\rightarrow$ Pas possible car trois cours à 8h30.

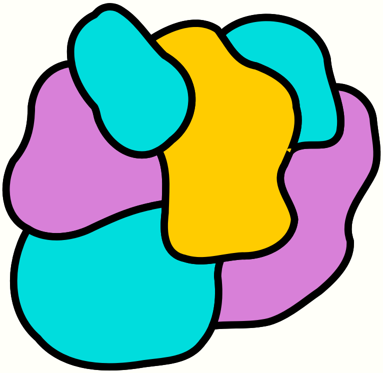
Un problème de coloriage

Combien de couleurs pour colorier sans que deux zones voisines ne soient de la même couleur ?



Un problème de coloriage

Combien de couleurs pour colorier sans que deux zones voisines ne soient de la même couleur ?

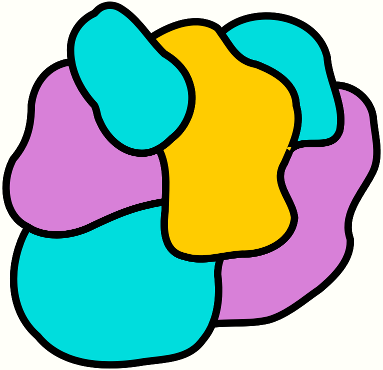


→ Possible avec trois couleurs

Deux couleurs ?

Un problème de coloriage

Combien de couleurs pour colorier sans que deux zones voisines ne soient de la même couleur ?



$\rightarrow$ Possible avec trois couleurs

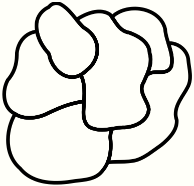
Deux couleurs ? $\rightarrow$ Non car trois zones se touchent deux à deux.

Lien ?

Emploi du temps

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

Coloriage

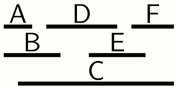


Lien ?

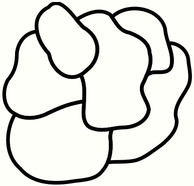
Emploi du temps

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

$\Rightarrow$



Coloriage

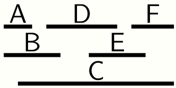


Lien ?

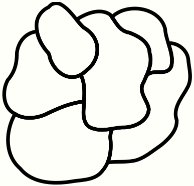
Emploi du temps

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

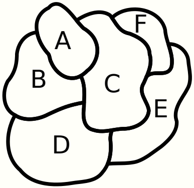
$\Rightarrow$



Coloriage



$\Rightarrow$

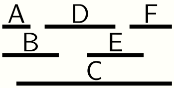


Lien ?

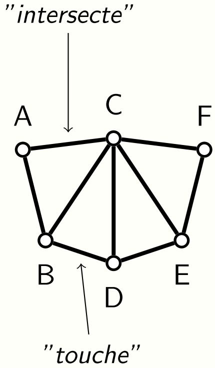
Emploi du temps

Anglais	8h-9h
Biologie	8h-10h
Chimie	8h30-15h
Droit	9h30-13h
Espagnol	12h-14h
Français	13h30-15h

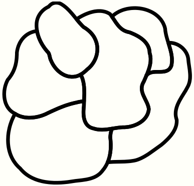
$\Rightarrow$



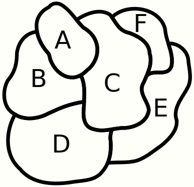
$\Rightarrow$



Coloriage



$\Rightarrow$

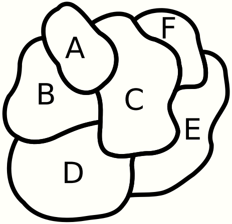


Lien ?

Emploi du temps

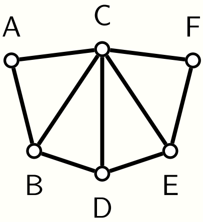
Anglais	8h-9h	
Biologie	8h-10h	
Chimie	8h30-15h	
Droit	9h30-13h	
Espagnol	12h-14h	
Français	13h30-15h	

Coloriage



$\Longleftrightarrow$

Graphe

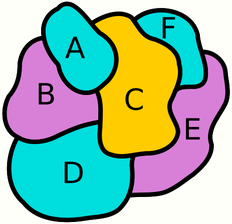


Lien ?

Emploi du temps

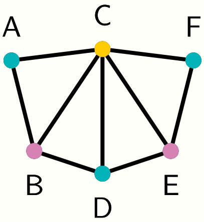
Anglais	8h-9h	S1
Biologie	8h-10h	S2
Chimie	8h30-15h	S3
Droit	9h30-13h	S1
Espagnol	12h-14h	S2
Français	13h30-15h	S1

Coloriage



$\Longleftrightarrow$

Graphe que l'on colorie



Les graphes

Définition d'un graphe

Un graphe c'est :

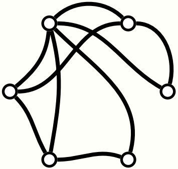
- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

Définition d'un graphe

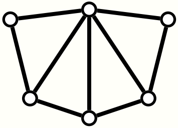
Un graphe c'est :

- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

Exemple :



ou encore

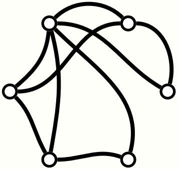
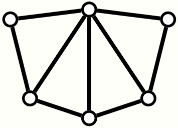


Définition d'un graphe

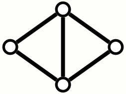
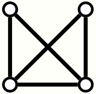
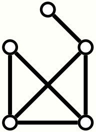
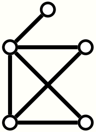
Un graphe c'est :

- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

Exemple :

 ou encore 

Ces graphes sont-ils les mêmes ?

Des graphes cachés partout !

- Dans le métro,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Une question :
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Questions :

Des graphes cachés partout !

- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Questions :

Des graphes cachés partout !

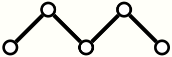
- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets : les personnes
  - Arêtes : les amis
  - Questions : trouver les communautés,
    nombre d'amis entre deux personnes

Des graphes cachés partout !

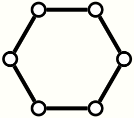
- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets : les personnes
  - Arêtes : les amis
  - Questions : trouver les communautés,
    nombre d'amis entre deux personnes
- Dans une ville,
  - Sommets : les carrefours
  - Arêtes : les rues
  - Une question : passer par toutes les rues (tournée du facteur)
- Dans les maisons, les réseaux d'ordinateurs, la théorie des jeux, la crypthographie,...

Quelques familles de graphes

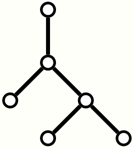
- Graphes classiques



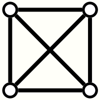
Chemin



Cycle



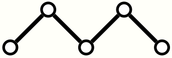
Arbre



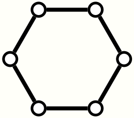
Complet

Quelques familles de graphes

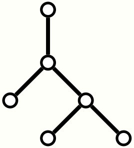
- Graphes classiques



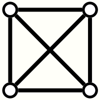
Chemin



Cycle

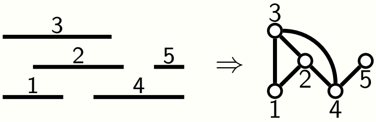


Arbre

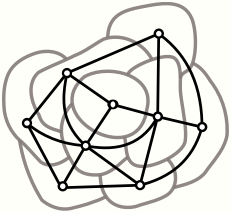


Complet

- Deux familles plus compliquées :



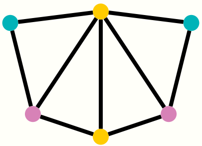
Graphes des "emplois du temps"



Graphes des "cartes"

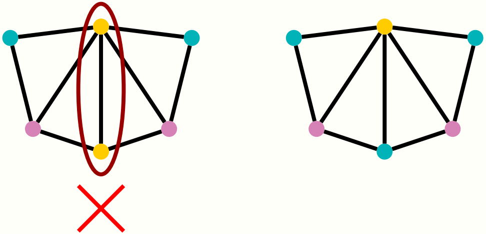
Coloration de graphe

Problème : colorier les sommets d'un graphe sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur



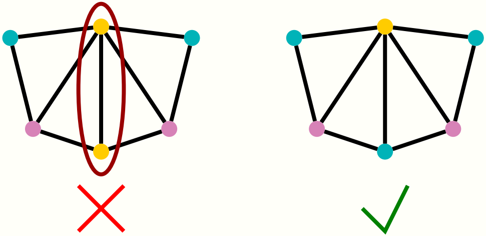
Coloration de graphe

Problème : colorier les sommets d'un graphe sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur



Coloration de graphe

Problème : colorier les sommets d'un graphe sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur

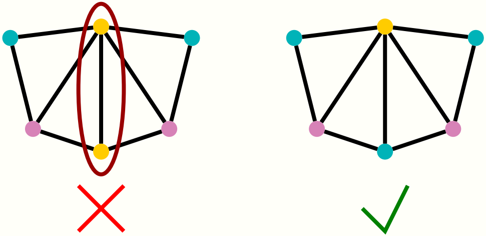


$\chi(G)$, nombre chromatique de G : le plus petit nombre de couleurs possible

En général, trouver $\chi(G)$ est un problème *difficile*.

Coloration de graphe

Problème : colorier les sommets d'un graphe sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur



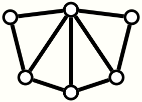
$\chi(G) = 3$

$\chi(G)$, nombre chromatique de G : le plus petit nombre de couleurs possible

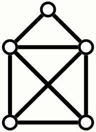
En général, trouver $\chi(G)$ est un problème *difficile*.

Borne inférieure pour la coloration

$\omega(G)$: taille du plus gros graphe complet dans G.



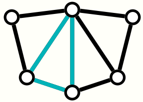
$\omega(G) =$



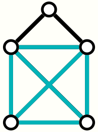
$\omega(G) =$

Borne inférieure pour la coloration

$\omega(G)$: taille du plus gros graphe complet dans G.



$\omega(G) = 3$

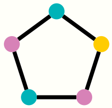


$\omega(G) = 4$

On a toujours :

$$\text{nb couleurs} \ \geq \ \text{taille graphe complet inclus}$$
$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Ce n'est pas toujours égal !

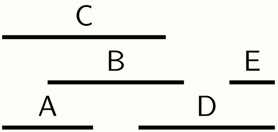


Nb couleurs min : $\chi(G) = 3$
Graphe complet max : $\omega(G) = 2$

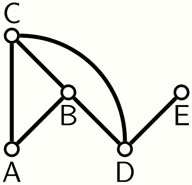
Les graphes d'intervalles

Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :

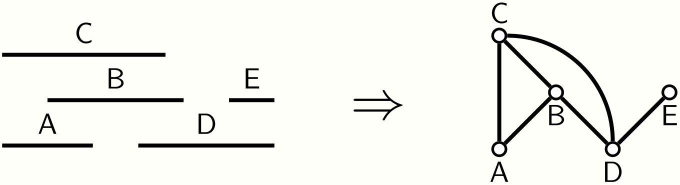


$\Rightarrow$

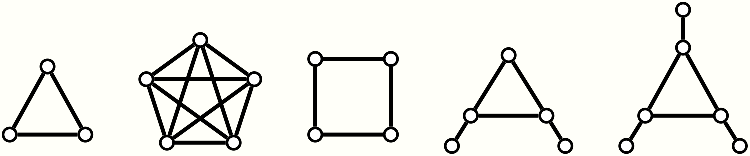


Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :

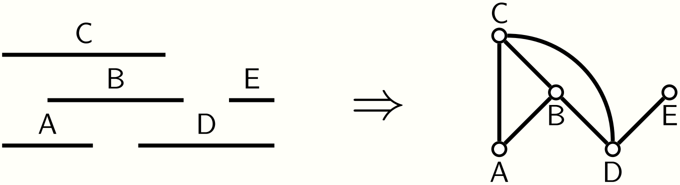


Les graphes suivants sont-ils des graphes d'intervalles ?

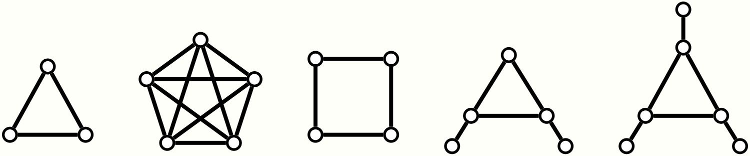


Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :



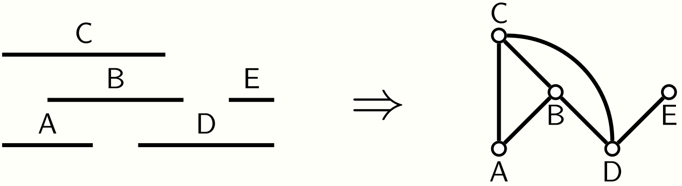
Les graphes suivants sont-ils des graphes d'intervalles ?



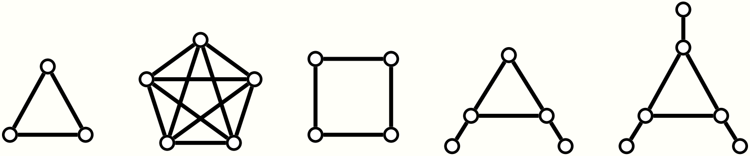
Oui Oui

Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :



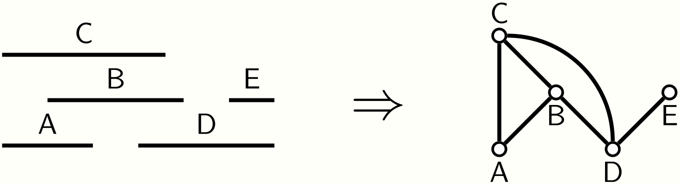
Les graphes suivants sont-ils des graphes d'intervalles ?



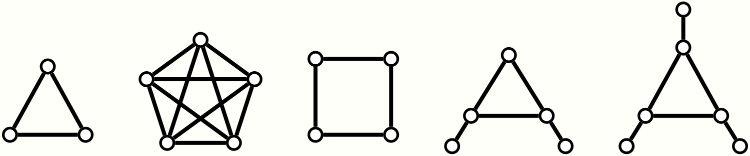
Oui Oui Non

Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :



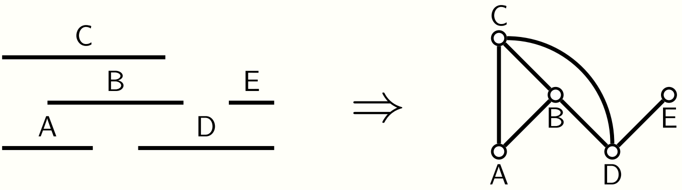
Les graphes suivants sont-ils des graphes d'intervalles ?



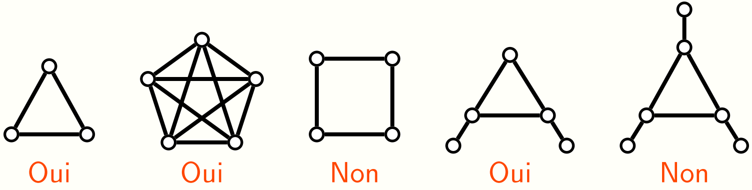
Oui Oui Non Oui

Graphes d'intervalles (ou graphes d'emploi du temps)

Intersection d'une famille d'intervalles :



Les graphes suivants sont-ils des graphes d'intervalles ?



On peut reconnaître *facilement* les graphes d'intervalles.

Coloration des graphes d'intervalles

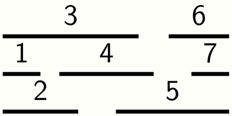
Algorithme :

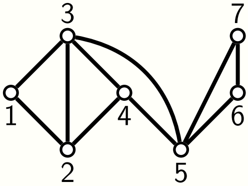
- Ordonner les intervalles par date de début croissante

Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

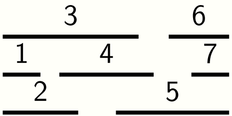


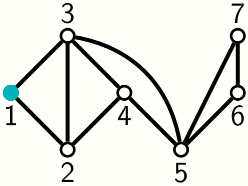


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

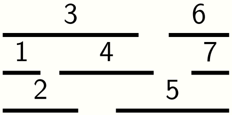


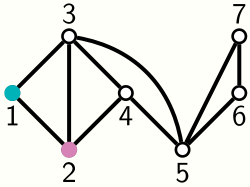


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

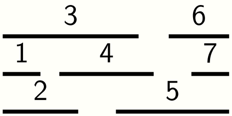


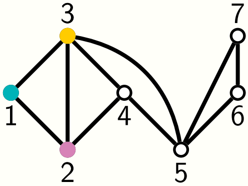


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

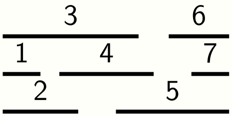


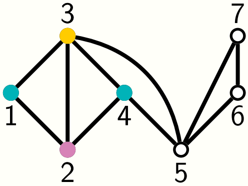


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

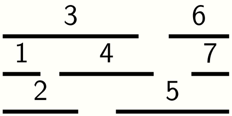


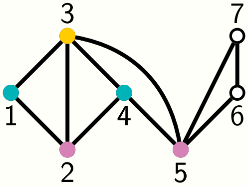


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

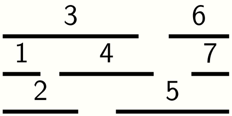


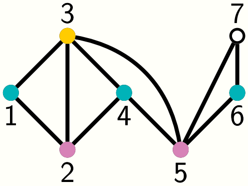


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur

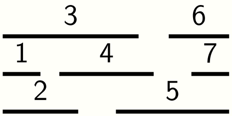


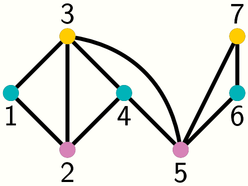


Coloration des graphes d'intervalles

Algorithme :

- Ordonner les intervalles par date de début croissante
- Colorer les sommets dans cet ordre :
  - Si une couleur n'est pas utilisée par un des voisins, colorer avec cette couleur
  - Sinon, prendre une nouvelle couleur





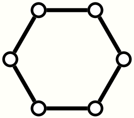
On obtient une coloration en $\omega(G)$: c'est optimal !

Les graphes d'intervalles sont parfaits

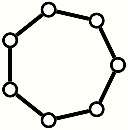
On vient de voir que :

$$\boxed{\text{Pour tout graphe d'intervalle } G : \chi(G) = \omega(G).}$$

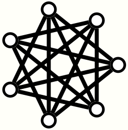
Les graphes vérifiant cela (avec leurs sous-graphes) sont parfaits.



Cycle pair



Cycle impair



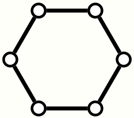
Trou impair

Les graphes d'intervalles sont parfaits

On vient de voir que :

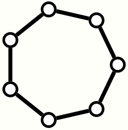
Pour tout graphe d'intervalle G : $\chi(G) = \omega(G)$.

Les graphes vérifiant cela (avec leurs sous-graphes) sont parfaits.

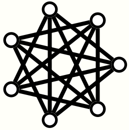


Cycle pair

Parfait



Cycle impair



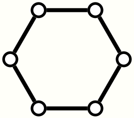
Trou impair

Les graphes d'intervalles sont parfaits

On vient de voir que :

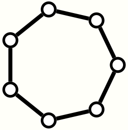
> Pour tout graphe d'intervalle G : $\chi(G) = \omega(G)$.

Les graphes vérifiant cela (avec leurs sous-graphes) sont parfaits.

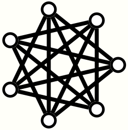


Cycle pair

Parfait



Cycle impair



Trou impair

Non parfait

Théorème des graphes parfaits (2002)

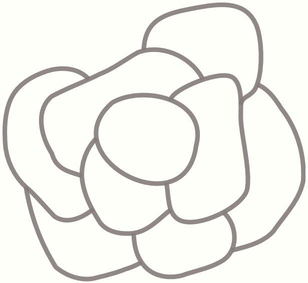
Un graphe est parfait $\Leftrightarrow$ il n'a ni cycle impair ni trou impair ≥ 5.

Les graphes planaires

Les graphes planaires (ou graphes des “cartes”)

Définition : on peut les dessiner sans croisement

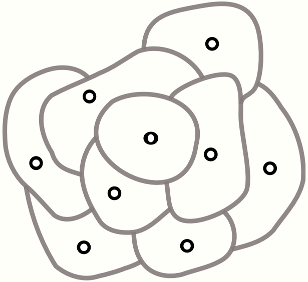
On peut toujours les construire à partir d’une carte



Les graphes planaires (ou graphes des “cartes”)

Définition : on peut les dessiner sans croisement

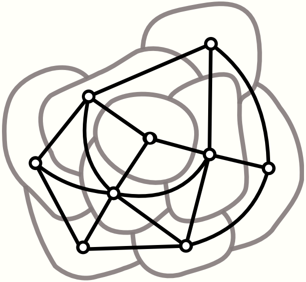
On peut toujours les construire à partir d'une carte



Les graphes planaires (ou graphes des “cartes”)

Définition : on peut les dessiner sans croisement

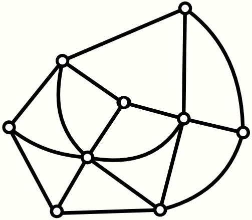
On peut toujours les construire à partir d’une carte



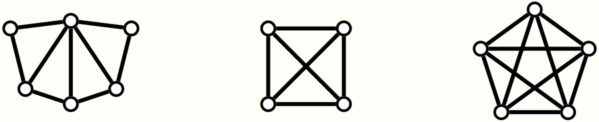
Les graphes planaires (ou graphes des “cartes”)

Définition : on peut les dessiner sans croisement

On peut toujours les construire à partir d’une carte



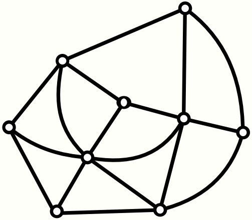
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



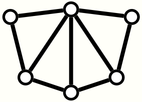
Les graphes planaires (ou graphes des “cartes”)

Définition : on peut les dessiner sans croisement

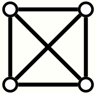
On peut toujours les construire à partir d’une carte



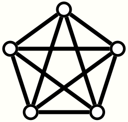
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



Oui



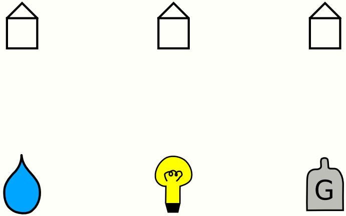
Oui



? ?

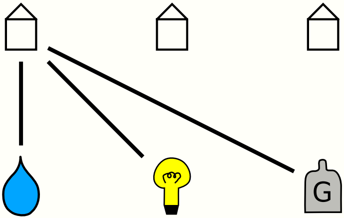
Disgression - le problème des trois maisons

Trois maisons à relier à l'eau, l'electricite, le gaz sans croiser les tuyaux.



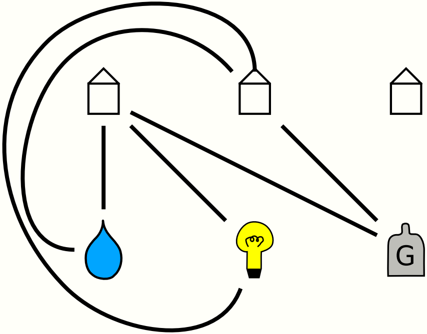
Disgression - le problème des trois maisons

Trois maisons à relier à l'eau, l'electricite, le gaz sans croiser les tuyaux.



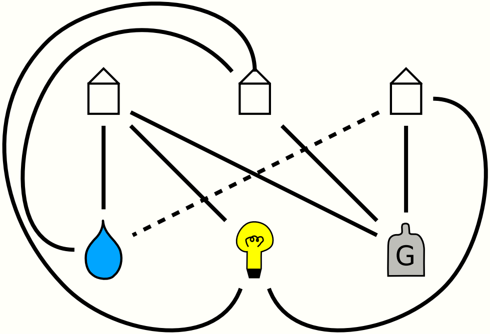
Disgression - le problème des trois maisons

Trois maisons à relier à l'eau, l'electricite, le gaz sans croiser les tuyaux.



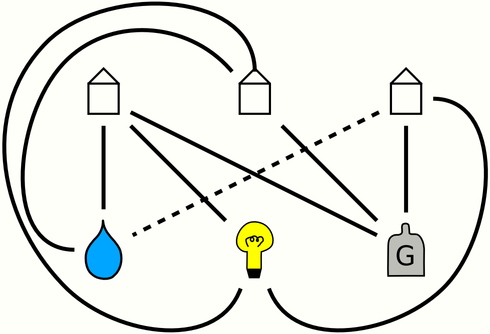
Disgression - le problème des trois maisons

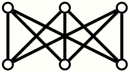
Trois maisons à relier à l'eau, l'electricite, le gaz sans croiser les tuyaux.



Disgression - le problème des trois maisons

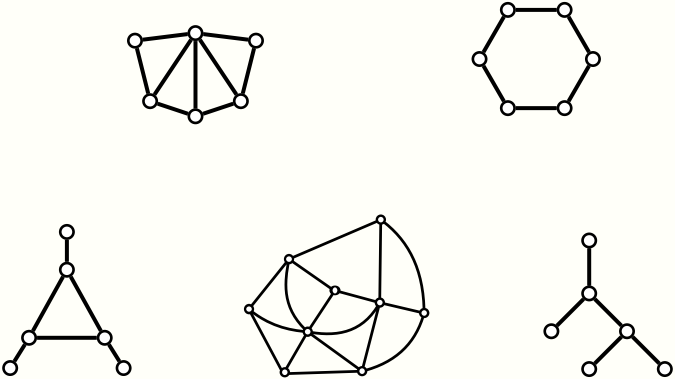
Trois maisons à relier à l'eau, l'electricite, le gaz sans croiser les tuyaux.



De manière équivalente : le graphe  est-il planaire ?

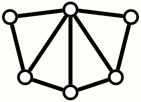
Comptons un peu

- S : nombre de sommets
- A : nombre d'arêtes
- F : nombre de faces (extérieure comprise)

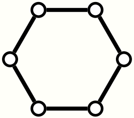


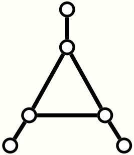
Comptons un peu

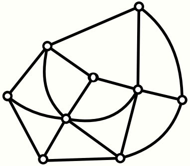
- S : nombre de sommets
- A : nombre d'arêtes
- F : nombre de faces (extérieure comprise)

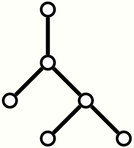


$S = 6, A = 9, F = 5$



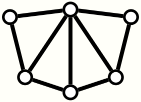




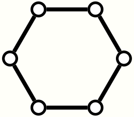


Comptons un peu

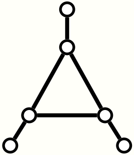
- S : nombre de sommets
- A : nombre d'arêtes
- F : nombre de faces (extérieure comprise)



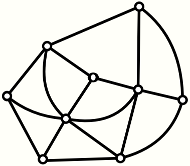
$S = 6, A = 9, F = 5$



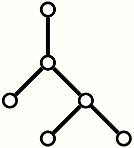
$6, 6, 2$



$6, 6, 2$



$9, 17, 10$



6,5,1

Formule d'Euler

- S : nombre de sommets
- A : nombre d'arêtes
- F : nombre de faces (extérieure comprise)

Formule d'Euler

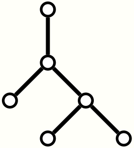
Si G est un graphe planaire connexe,

$$S - A + F = 2.$$

Démonstration de la formule d'Euler $S - A + F = 2$

Par récurrence sur le nombre de faces.

- $F = 1$: c'est un arbre

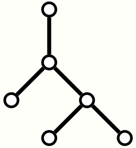


On a toujours $A = S - 1$ et donc $S - A + F = 2$.

Démonstration de la formule d'Euler $S - A + F = 2$

Par récurrence sur le nombre de faces.

- $F = 1$: c'est un arbre

  On a toujours $A = S - 1$ et donc $S - A + F = 2$.
- Supposons vrai pour $k \geq 1$ et montrons-le pour $F = k + 1$ faces.
  - G a un cycle avec une arête e. Soit G' le graphe sans e.
  - G' a une face de moins !
  - Le résultat est vrai pour G', donc $S' - A' + F' = 2$.
  - Donc $S - A + F = 2$.

Conséquences de la formule d'Euler

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

Toute face a au moins 3 arêtes et chaque arête est sur deux faces, donc :

$$2A \geq 3F.$$

En utilisant la formule d'Euler :

$$\boxed{A \leq 3S - 6}$$

Conséquences de la formule d'Euler

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

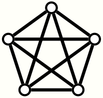
Toute face a au moins 3 arêtes et chaque arête est sur deux faces, donc :

$$2A \geq 3F.$$

En utilisant la formule d'Euler :

$$\boxed{A \leq 3S - 6}$$

Application :

- Le graphe  n'est pas planaire :

Conséquences de la formule d'Euler

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

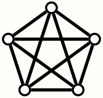
Toute face a au moins 3 arêtes et chaque arête est sur deux faces, donc :

$$2A \geq 3F.$$

En utilisant la formule d'Euler :

$$\boxed{A \leq 3S - 6}$$

Application :

- Le graphe  n'est pas planaire : $S = 5$, $A = 10$

Conséquences de la formule d'Euler

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

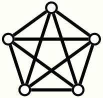
Toute face a au moins 3 arêtes et chaque arête est sur deux faces, donc :

$$2A \geq 3F.$$

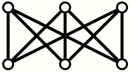
En utilisant la formule d'Euler :

$$\boxed{A \leq 3S - 6}$$

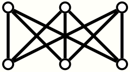
Application :

- Le graphe  n'est pas planaire : $S = 5$, $A = 10$
- Il y a toujours un sommet avec au plus 5 voisins.

Retour au problème des trois maisons

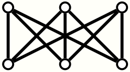
Pour  la formule $A \leq 3S - 6$ est vérifiée.

Retour au problème des trois maisons

Pour  la formule $A \leq 3S - 6$ est vérifiée.

... mais les faces ne peuvent pas être des triangles !

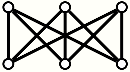
Retour au problème des trois maisons

Pour  la formule $A \leq 3S - 6$ est vérifiée.

... mais les faces ne peuvent pas être des triangles !

S'il était planaire, toute face aurait au moins quatre arêtes.
Et on aurait $2A \geq 4F$ et $A \leq 2S - 4$. Contradiction !

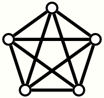
Retour au problème des trois maisons

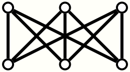
Pour  la formule $A \leq 3S - 6$ est vérifiée.

... mais les faces ne peuvent pas être des triangles !

S'il était planaire, toute face aurait au moins quatre arêtes.
Et on aurait $2A \geq 4F$ et $A \leq 2S - 4$. Contradiction !

Théorème de Kuratowski (1932)

Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient ni 

ni  comme mineur.

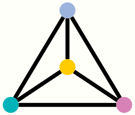
Retour à la coloration

Combien de couleurs pour colorer n'importe quel graphe planaire ?

Retour à la coloration

Combien de couleurs pour colorer n'importe quel graphe planaire ?

Au moins 4



Existe-t-il des graphes ayant besoin de plus que 4 ?

Théorème des quatre couleurs

Théorème des quatre couleurs

Tout graphe planaire peut se colorier avec quatre couleurs.

- 1858 Conjecturé par Guthrie.
- 1879 Premier essai de preuve par Kempe.
- 1976 Preuve informatique par Appel et Haken.
  1478 cas à vérifier, 1200h de calculs !
- 1997 Robertson, Sanders, Seymour et Thomas réduisent les cas
- 2005 Programme vérifié automatiquement

Preuve pour six et cinq couleurs

Rappel : il y a toujours un sommet avec au plus 5 voisins.

Preuve pour six couleurs par récurrence :

- Facile si ≤ 6 sommets
- G avec n sommets.
  - Il existe un somme u avec au plus cinq voisins
  - On colorie $G - u$ par récurrence
  - On colorie u : il y a au plus 5 couleurs utilisées par les voisins, une est libre !

Preuve pour six et cinq couleurs

Rappel : il y a toujours un sommet avec au plus 5 voisins.

Preuve pour six couleurs par récurrence :

- Facile si ≤ 6 sommets
- G avec n sommets.
  - Il existe un somme u avec au plus cinq voisins
  - On colorie $G - u$ par récurrence
  - On colorie u : il y a au plus 5 couleurs utilisées par les voisins, une est libre !

Même genre d'idées pour cinq couleurs.

Pour finir sur la coloration des graphes planaires

- On peut toujours colorer un graphe planaire avec 4 couleurs
- C'est difficile de décider si on peut faire avec 3.
- Généralisation : si on interdit un mineur, le nombre de couleurs nécéssaire est borné.

Conjecture d'Hadwiger

Si on interdit le graphe complet à n sommets comme mineur, on peut colorier avec $n-1$ couleurs

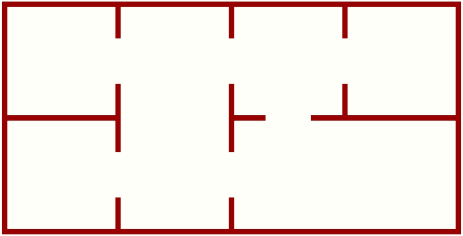
Ouverte pour $n > 6$...

Conclusion sur la coloration

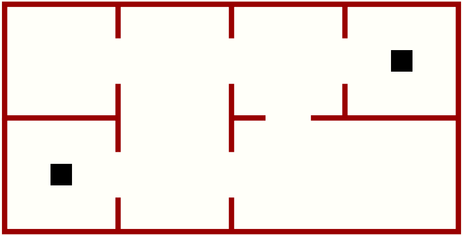
- Un problème difficile en général.
- Pour certaines classes (graphes d'intervalles...) :
  besoin de beaucoup de couleurs, mais facile à calculer
- Pour d'autres (graphes planaires) : nombre de couleurs borné
  mais difficile de connaitre la valeur exacte.
- Plein de problèmes ouverts...

Codes identifiants

Détection de feux dans un musée ?

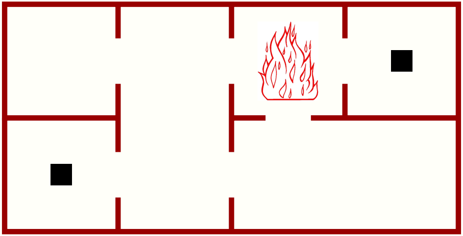


Détection de feux dans un musée ?



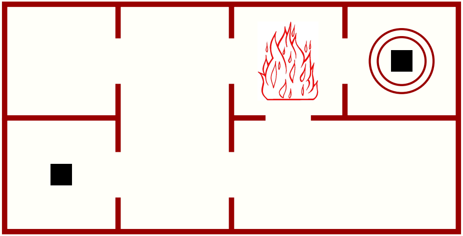
- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détection de feux dans un musée ?



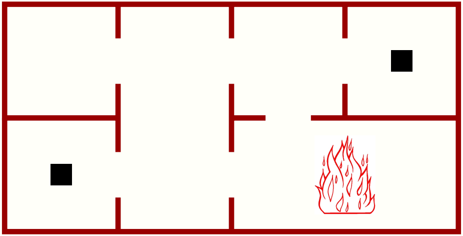
- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détection de feux dans un musée ?



- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détection de feux dans un musée ?

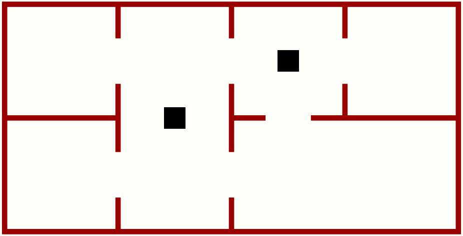


- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détection de feux dans un musée ?

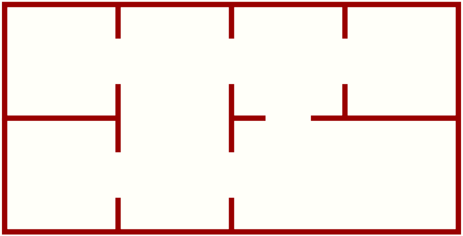
- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine
- Nombre minimum de détecteurs ?

Détection de feux dans un musée ?



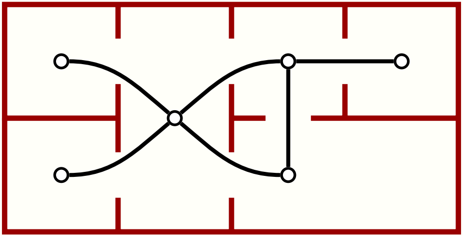
- Un détecteur s'allume s'il y a un feu dans la pièce ou dans une pièce voisine
- Nombre minimum de détecteurs ?

Modélisation avec un graphe



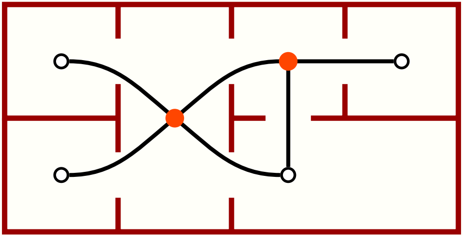
- Sommets : salles
- Arêtes entre deux salles voisines

Modélisation avec un graphe



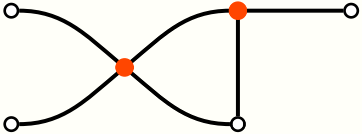
- Sommets : salles
- Arêtes entre deux salles voisines

Modélisation avec un graphe



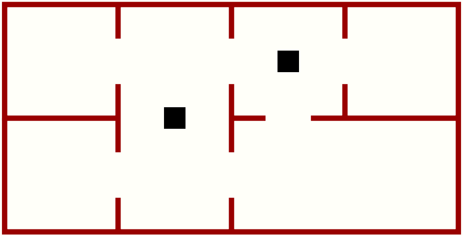
- Sommets : salles
- Arêtes entre deux salles voisines
- L'ensemble des détecteurs est un ensemble dominant.

Modélisation avec un graphe

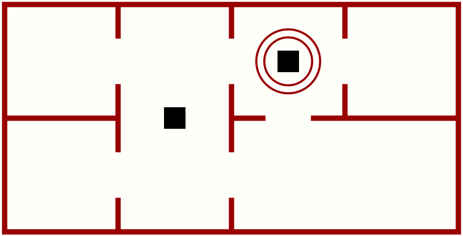


- Sommets : salles
- Arêtes entre deux salles voisines
- L'ensemble des détecteurs est un ensemble dominant.

Où est le feu ?

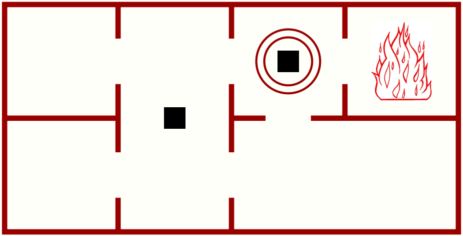


Où est le feu ?



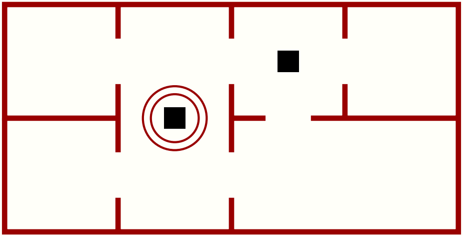
Où est le feu ?

Où est le feu ?



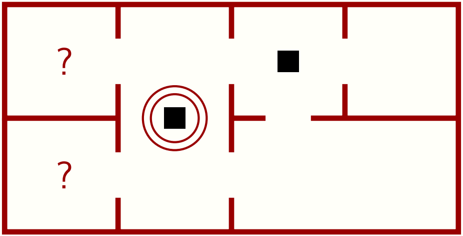
Où est le feu ?

Où est le feu ?



Où est le feu ?

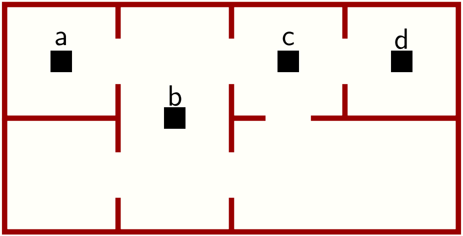
Où est le feu ?



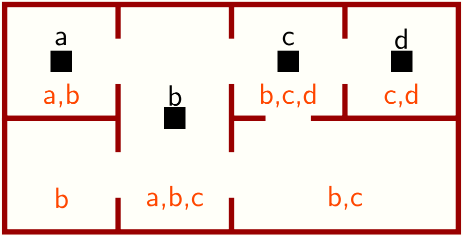
Où est le feu ?

Pour localiser le feu, on a besoin de plus de détecteurs.

Où est le feu ?



Où est le feu ?

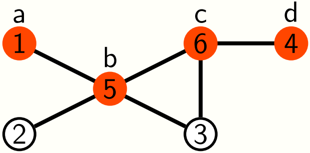


Dans chaque pièce l'ensemble des détecteurs qui s'allument est unique.

Modélisation

Code identifiant C :

- ensemble dominant,
- tel que les voisins dans C de chaque sommet sont unique.



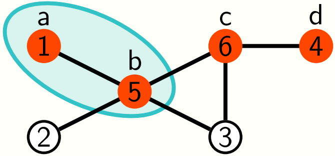
V \ C	a	b	c	d
1	•	•	-	-
2	-	•	-	-
3	-	•	•	-
4	-	-	•	•
5	•	•	•	-
6	-	•	•	•

$\gamma^{ID}(G)$: la taille du plus petit code identifiant de G.

Modélisation

Code identifiant C :

- ensemble dominant,
- tel que les voisins dans C de chaque sommet sont unique.



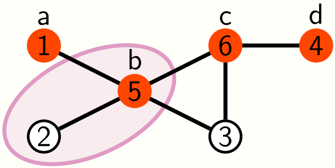
V \ C	a	b	c	d
1	•	•	-	-
2	-	•	-	-
3	-	•	•	-
4	-	-	•	•
5	•	•	•	-
6	-	•	•	•

$\gamma^{ID}(G)$: la taille du plus petit code identifiant de G.

Modélisation

Code identifiant C :

- ensemble dominant,
- tel que les voisins dans C de chaque sommet sont unique.



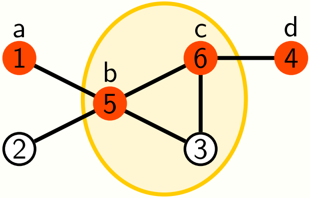
V \ C	a	b	c	d
1	•	•	-	-
2	-	•	-	-
3	-	•	•	-
4	-	-	•	•
5	•	•	•	-
6	-	•	•	•

$\gamma^{ID}(G)$: la taille du plus petit code identifiant de G.

Modélisation

Code identifiant C :

- ensemble dominant,
- tel que les voisins dans C de chaque sommet sont unique.



V \ C	a	b	c	d
1	•	•	-	-
2	-	•	-	-
3	-	•	•	-
4	-	-	•	•
5	•	•	•	-
6	-	•	•	•

$\gamma^{ID}(G)$: la taille du plus petit code identifiant de G.

Quelques résultats

- C'est difficile... même pour les graphes d'intervalles !
- On peut toujours enlever un sommet :

$$\gamma^{ID}(G) \leq S - 1$$

- Il faut toujours un certain nombre d'éléments :

$$\gamma^{ID}(G) \geq \log_2(S + 1)$$

- Si G est un graphe d'intervalle, il en faut encore plus :

$$\gamma^{ID}(G) \geq \sqrt{2S}$$

Une question ouverte :

- Pour les graphes d'intervalles unitaires, cela reste-t-il difficile ?

Conclusion

- Des graphes (presque) partout
- Permettent de modéliser de nombreux problèmes
- Domaine assez récent, entre mathématique et informatique
- Problèmes souvent simples d'énoncé...
- ... mais dont les solutions sont plus compliquées
- Des tas de questions ouvertes !

Conclusion

- Des graphes (presque) partout
- Permettent de modéliser de nombreux problèmes
- Domaine assez récent, entre mathématique et informatique
- Problèmes souvent simples d'énoncé...
- ... mais dont les solutions sont plus compliquées
- Des tas de questions ouvertes !

Merci pour votre attention !