Fractales aléatoires

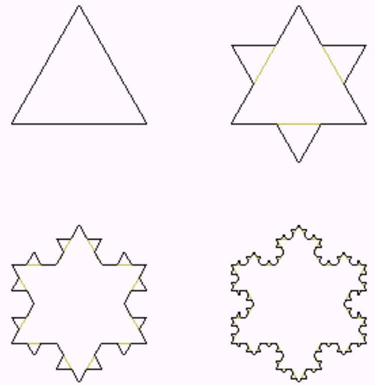
Vincent Beffara

Mathematic Park - IHP - 12 octobre 2013

Fractales : définition

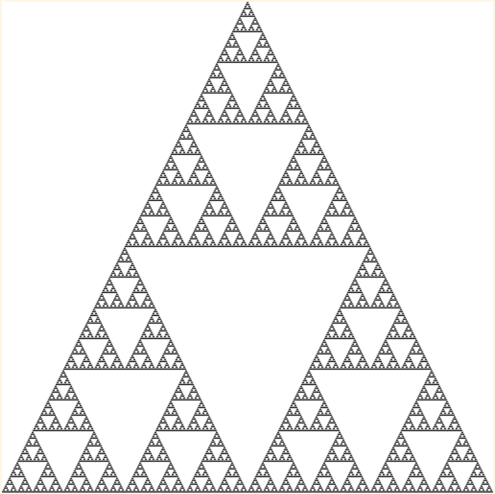
On va attendre un peu pour ça . . . d'abord quelques exemples

Flocon de Von Kock

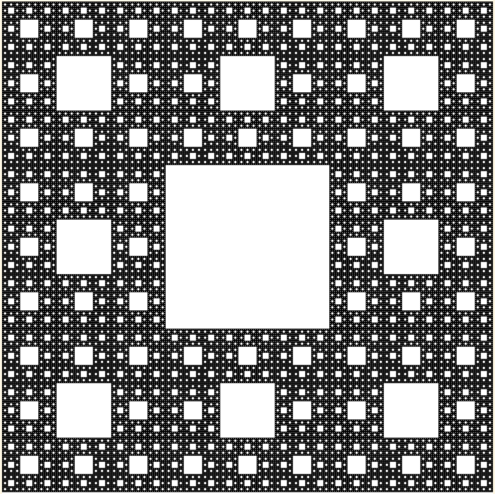


The first four iterations of the Koch snowflake

Triangle de Sierpinski

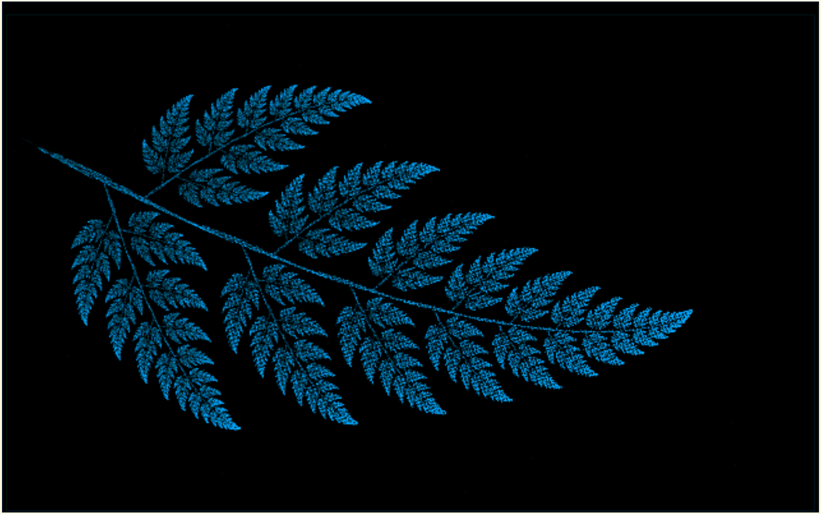


Tapis de Sierpinski

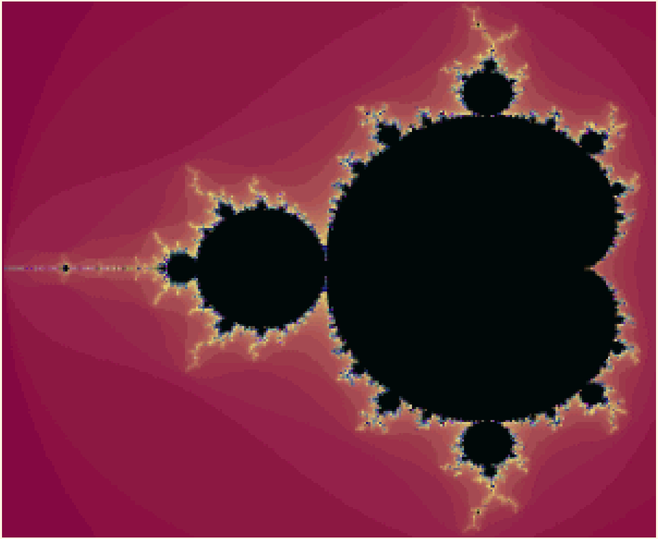


Sierpinski carpet of six iterations

Un peu plus réaliste :



Un peu plus connu :



Et la définition ?

On peut penser à plusieurs caractéristiques des images qui précèdent pour essayer d'en extraire une définition cohérente. Dans le désordre :

- Complexité de l'image
- Autosimilarité
- Objet obtenu par itération
- Rugosité ?

Ça a l'air un peu vague, mais c'est normale : le mot *fractale* n'a pas un sens bien établi en mathématiques.

Vraiment ?

Bon OK, on peut faire une définition. Même deux :

Definition

La *dimension* (dite *de Minkowski*) de A est $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_\varepsilon}{|\log \varepsilon|}$.

Definition

Un ensemble est dit *fractal* si sa dimension n'est pas entière.

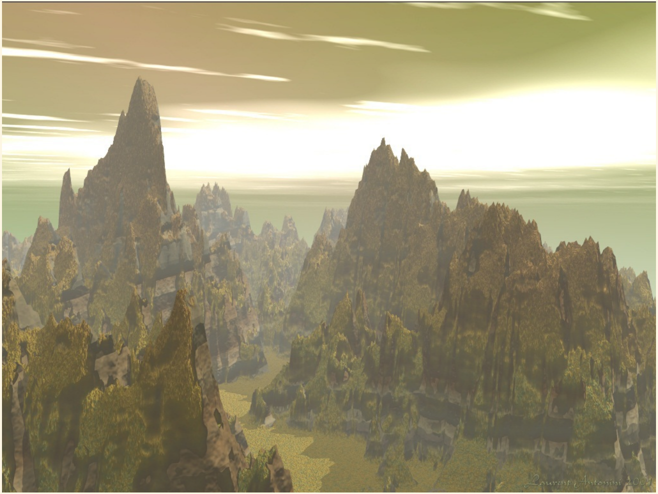
Ça demande une petite explication quand même !

Vous avez déjà vu une fougère aussi régulière ?

Le but du jeu c'est de *modéliser* des object réels. Pour l'instant ce n'est pas vraiment le cas, parce que nos exemples sont trop réguliers pour être réalistes.

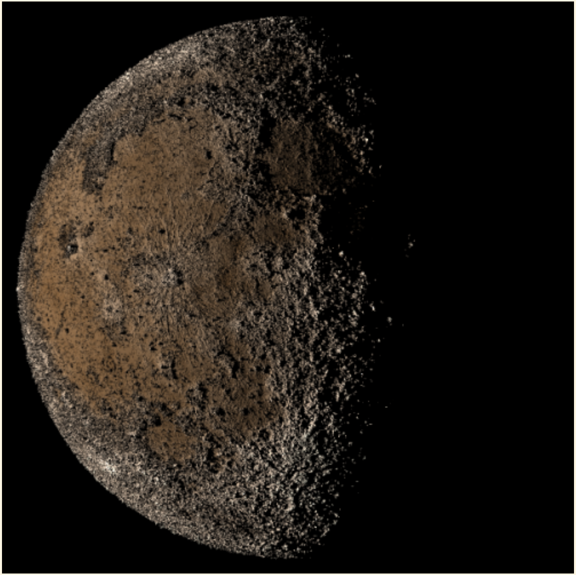
Voici quelques images dont on voudrait bien pouvoir parler.

Paysage



Nuages

Lune



L'une d'entre elles est une photo

On a deux sortes d'objets qui sont susceptibles d'être étudiés, et avec lesquels on voudrait bien faire des maths :

- Les "vrais" objets : plantes, montagnes, nuages ... on voudrait bien les comprendre de manière quantitative.
- Les modèles mathématiques : ce sont des simplifications qui sont en principe plus simples, et dont on espère qu'ils attrapent une partie intéressante de leur comportement.

Pourquoi faire intervenir les probabilités ?

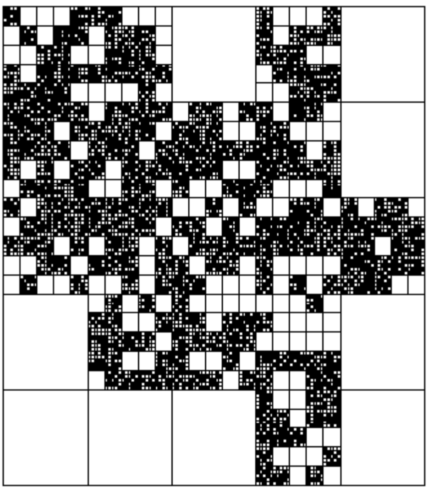
Une façon de casser la trop grande symmétrie des fractales du début, c'est de prendre leur construction et de la rendre aléatoire. On fait tourner la fougère à gauche ou à droite selon un tirage à pile ou face, etc.
Ça marche très bien, on obtient des constructions beaucoup plus réalistes comme ça (par exemple le paysage montagneux de tout à l'heure). On peut choisir la dimension, par exemple.

Mais ça ne répond pas vraiment à la question :

- Pourquoi obtient-on des images plus réalistes ?
- Comment étudier les objets obtenus ?

Quelques exemples que je vous raconte au fur et à mesure.

Tapis de Sierpinski aléatoire



Tapis de Sierpinski aléatoire

On peut prouver des choses dessus :

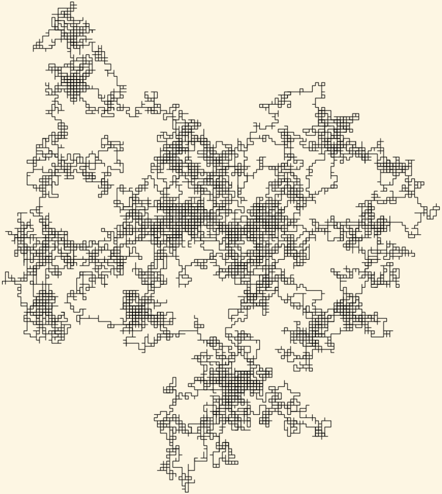
Theorem

La dimension du tapis aléatoire dépend de p. Elle est nulle si $p < 1/16$, et sinon elle vaut $2 - \dfrac{|\log p|}{\log 4}$.

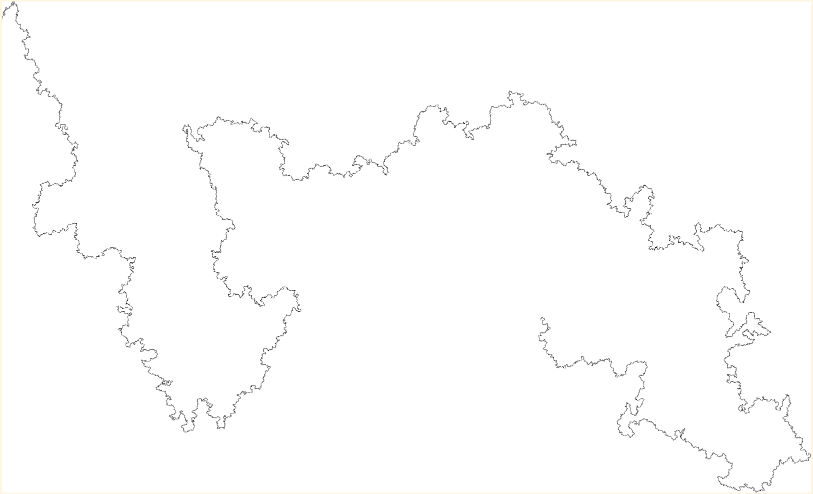
Theorem

Si p est assez grand, le tapis contient des grandes composantes connexes; sinon, il est totalement disconnecté. $\frac{15}{16}$ est assez grand.

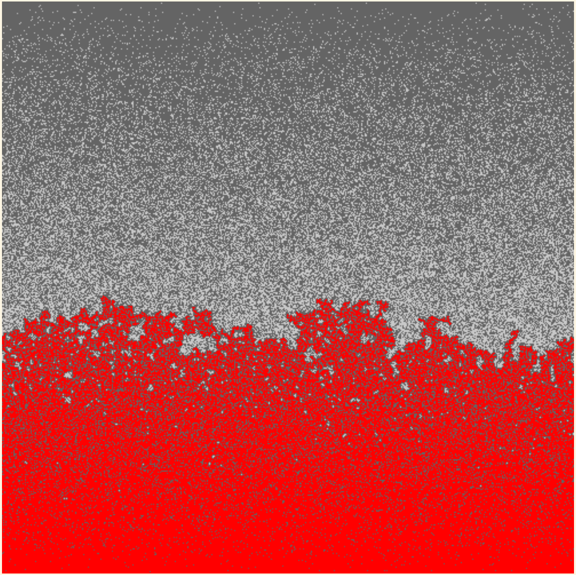
Marche aléatoire



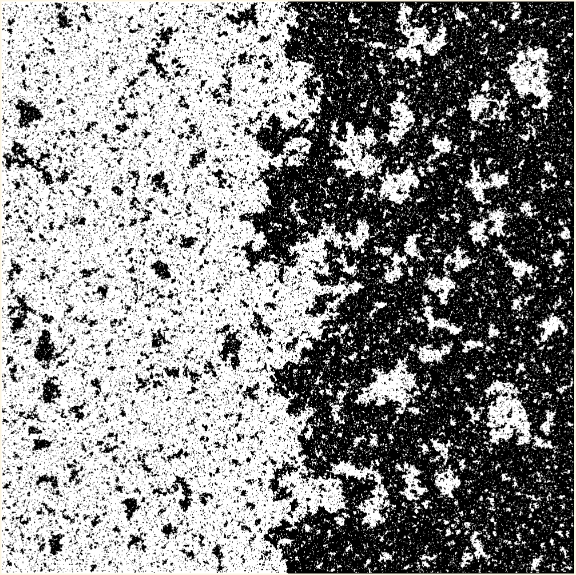
Marche à boucles effacées



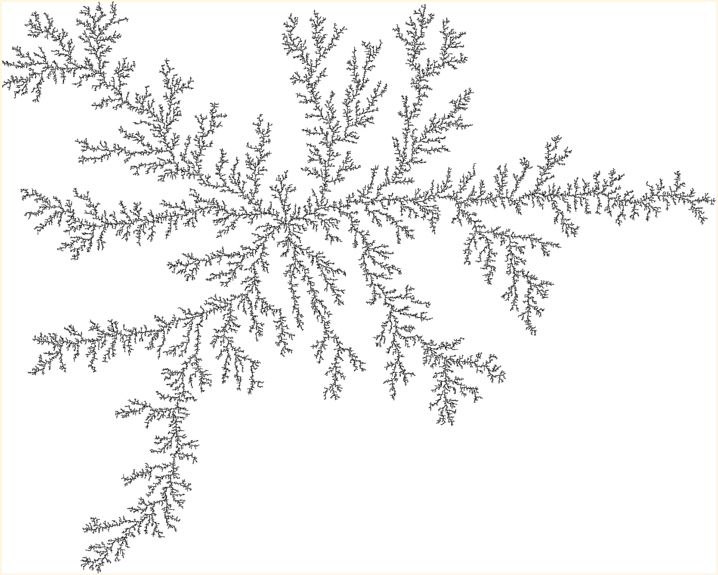
Percolation (en gradient)



Modèle d'Ising



DLA



Que sait-on sur ces modèles ?

Pas grand chose . . .

Mais un petit peu quand même !

Que sait-on sur la marche aléatoire ?

- Le théorème central limite nous dit qu'en n pas on se trouve à distance de l'ordre de $\sqrt{n}$
- Si on fait un zoom de facteur $1/\sqrt{n}$ on obtient dont un objet de taille de l'ordre de 1
- Si ensuite on fait tendre n vers l'infini, on obtient à la limite le mouvement brownien
- Comme le volume de la boule de rayon $\sqrt{n}$ est d'ordre n, la trajectoire est de dimension 2

Et beaucoup plus récemment :

- Le bord de la trajectoire est de dimension $4/3$
- La marche à boucles effacées est de dimension $5/4$

Prouvable plus facilement : le bord est "vraiment fractal".

Que sait-on sur les modèles sur réseaux ?

- Il y a une transition de phase
- Il y a une localisation de l'interface si on n'est pas à la bonne température
- Dans certains cas : à la température critique, l'interface fluctue autant que la taille de la boîte

Et beaucoup plus récemment :

- Le contour de la percolation est de dimension 7/4
- Le bord extérieur de la percolation est de dimension 4/3
- ... et de plus il ressemble à celui d'une marche aléatoire

Que sait-on sur le DLA ?

En gros : rien du tout ...